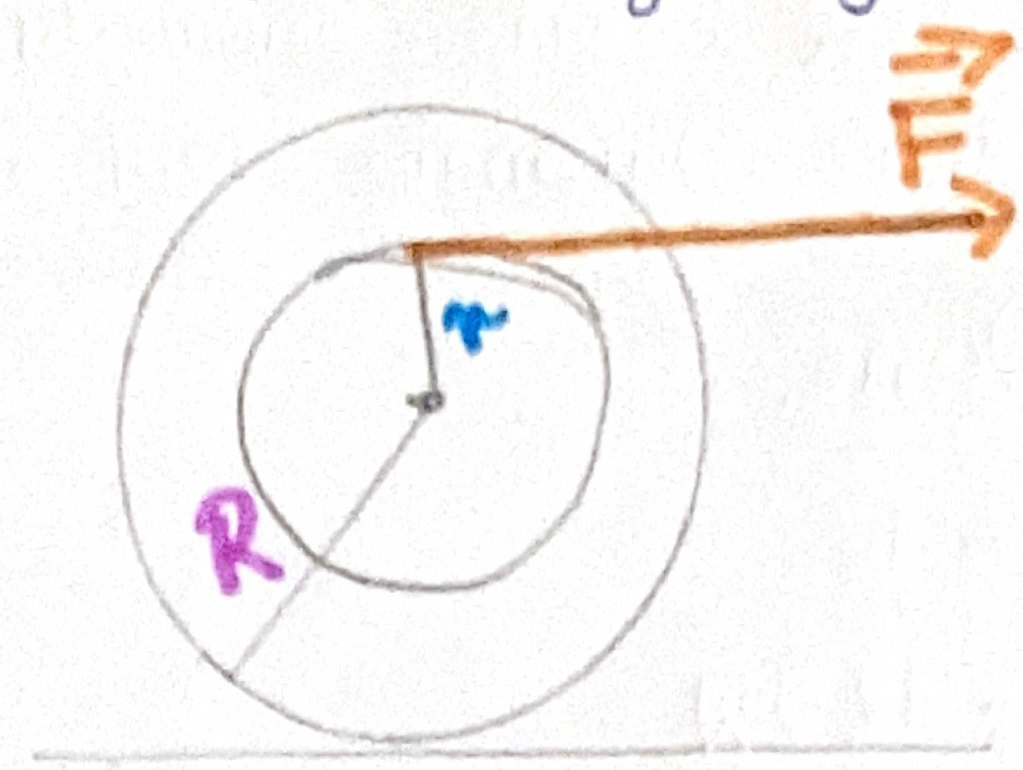
zad. 8.8. Szpulkę z nawiniętą nicią, położoną na płaszczyźnie poziomej, ciągniemy siłą $\vec{F}$ tak, jak pokazano na rysunku. Szpulka toczy się bez poślizgu. Dane są: R, r, masa szpulki m i jej moment bezwładności J_0 względem osi symetrii. Wyprowadź wzory na:

a) wartość przyspieszenia środka masy szpulki,

b) wartość siły tarcia szpulki o podłoże.

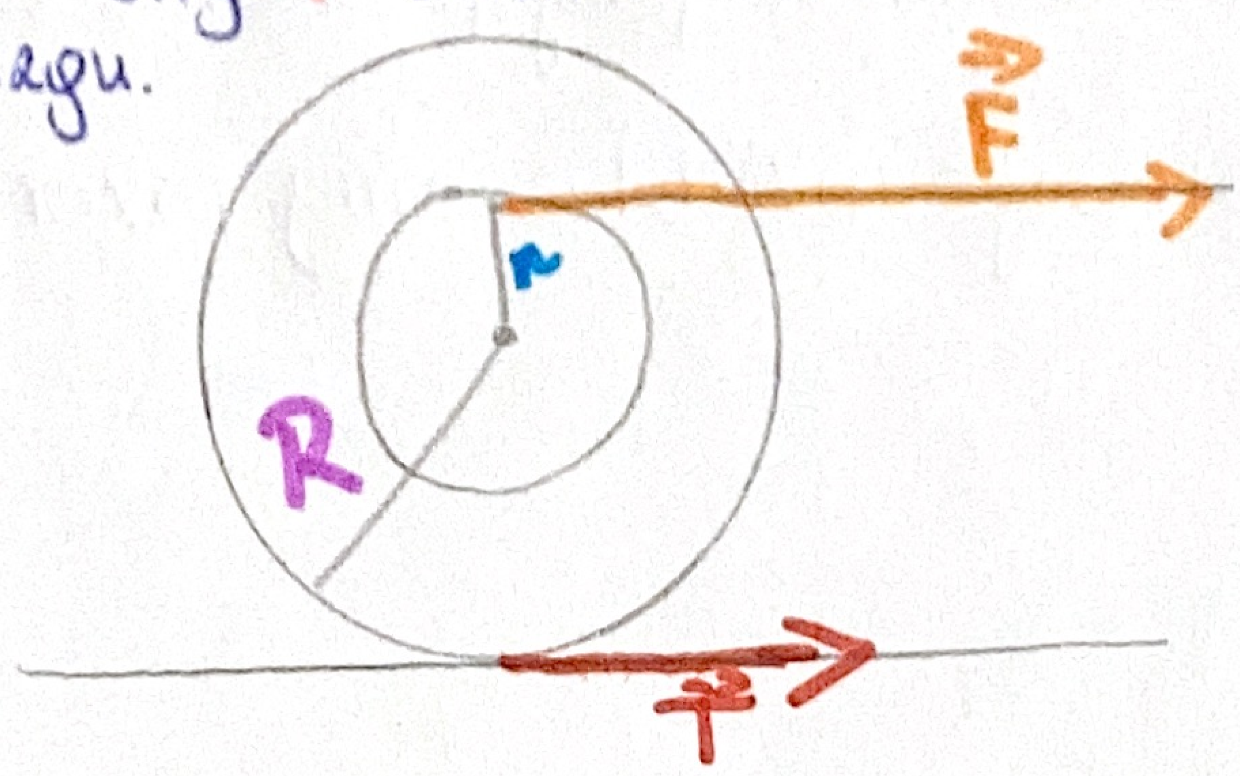


W zadaniu podane mamy:

- wartość siły: F,
- promień zewnętrzny szpulki: R
- promień wewnętrzny szpulki: r
- masa szpulki m
- moment bezwładności szpulki względem osi przechodzącej przez jej środek: J_0

a) Szukamy wartości przyspieszenia środka masy szpulki: $a = ?$

Na szpulkę oprócz siły $\vec{F}$ działa siła tarcia statycznego $\vec{T}$, która powoduje ruch szpulki bez poślizgu.



Jeżeli oś obrotu znajduje się w środku geometrycznym szpulki nici to momenty siły działających na szpulkę względem tej osi będą miały postać:

$$M_F = rF$$
$$M_T = RT$$

Zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej otrzymujemy, że moment sił działających na szpulkę względem osi przechodzącej przez jej środek geometryczny mają przeciwne zwroty. Wówczas wartość wypadkowego momentu siły ma postać:

$$M = M_F - M_T$$

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego otrzymujemy, że:

$$J_0 \varepsilon = M$$
$$J_0 \varepsilon = M_F - M_T$$
$$J_0 \varepsilon = rF - RT$$

Wartość przyspieszenia kątowego szpulki w zależności od jego przyspieszenia liniowego ma postać:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

Zatem z powyższych wzorów wynika, że wartość siły tarcia ma postać:

$$J_0 \frac{a}{R} = rF - RT \quad | +RT$$

$$J_0 \frac{a}{r} + RT = rF \quad | - J_0 \frac{a}{R}$$

$$RT = rF - J_0 \frac{a}{R} \quad | : R$$

$$T = \frac{r}{R} F - J_0 \frac{a}{R^2}$$

$$T = \frac{r}{R} F - \frac{J_0}{R^2} a$$

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego otrzymujemy, że:

$$ma = T + F$$

$$ma = \frac{r}{R} F - \frac{J_0}{R^2} a + F \quad | + \frac{J_0}{R^2} a$$

$$ma + \frac{J_0}{R^2} a = \frac{r}{R} F + F \quad | \cdot R^2$$

$$mR^2 a + J_0 a = rRF + R^2 F$$

$$(mR^2 + J_0) a = F(r+R)R \quad | : (mR^2 + J_0)$$

$$a = F \frac{(r+R)R}{mR^2 + J_0}$$

b) Siła tarcia jest zwrócona w tę samą stronę co siła powodująca obrót szpulki, ale moment siły pochodzący od siły tarcia jest przeciwny do momentu siły powodującej obrót szpulki. Dlatego:

$$T = -\left[\frac{r}{R} F - \frac{J_0}{R^2} a \right]$$

$$T = -\left[\frac{r}{R} F - \frac{J_0}{R^2} F \frac{(r+R)R}{mR^2 + J_0} \right]$$

$$T = -\left[\frac{r}{R} F - \frac{J_0}{R} F \frac{r+R}{mR^2 + J_0} \right]$$

$$T = -F \left[\frac{r}{R} - \frac{J_0 (r+R)}{R(mR^2 + J_0)} \right]$$

$$T = -F \left[\frac{r(mR^2 + J_0)}{R(mR^2 + J_0)} - \frac{J_0 (r+R)}{R(mR^2 + J_0)} \right]$$

$$T = -F \frac{mrR^2 + J_0 r - J_0 r - J_0 R}{R(mR^2 + J_0)}$$

$$T = -F \frac{mrR^2 - J_0 R}{R(mR^2 + J_0)}$$

$$T = -F \frac{R(mrR - J_0)}{R(mR^2 + J_0)}$$

$$T = F \frac{-mrR + J_0}{mR^2 + J_0}$$

$$T = F \frac{J_0 - mrR}{J_0 + mR^2}$$